CUADERNILLO 1

Nueva carpeta de Matemática VI

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

1. Funciones exponenciales y logarítmicas 3
Revisión inicial ... 4
El modelo exponencial ... 5
La función exponencial ... 6
Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x + b$ ... 8
Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^{x+c}$ ... 9
Ecuaciones exponenciales ... 10
Logaritmos ... 12
Logaritmos decimales y logaritmos naturales ... 13
Propiedades de los logaritmos ... 14
Sistemas de ecuaciones ... 16
La función logarítmica ... 17
Funciones del tipo $f(x) = \log c(ax + b)$ ... 18
El modelo logarítmico ... 19
Sucesiones geométricas ... 20
Suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica ... 21
Modelos de crecimiento geométrico ... 22
Noción de límite de una sucesión ... 23
El número *e* ... 24
En el mundo real ... 25
Las funciones exponenciales y los cálculos financieros ... 25
Las funciones logarítmicas y las soluciones químicas ... 26
Más actividades ... 27
Autoevaluación ... 30

AIQUE

Este CUADERNILLO 1 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática VI.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Leda Rensin - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupí y de Claudia García en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0078-7
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

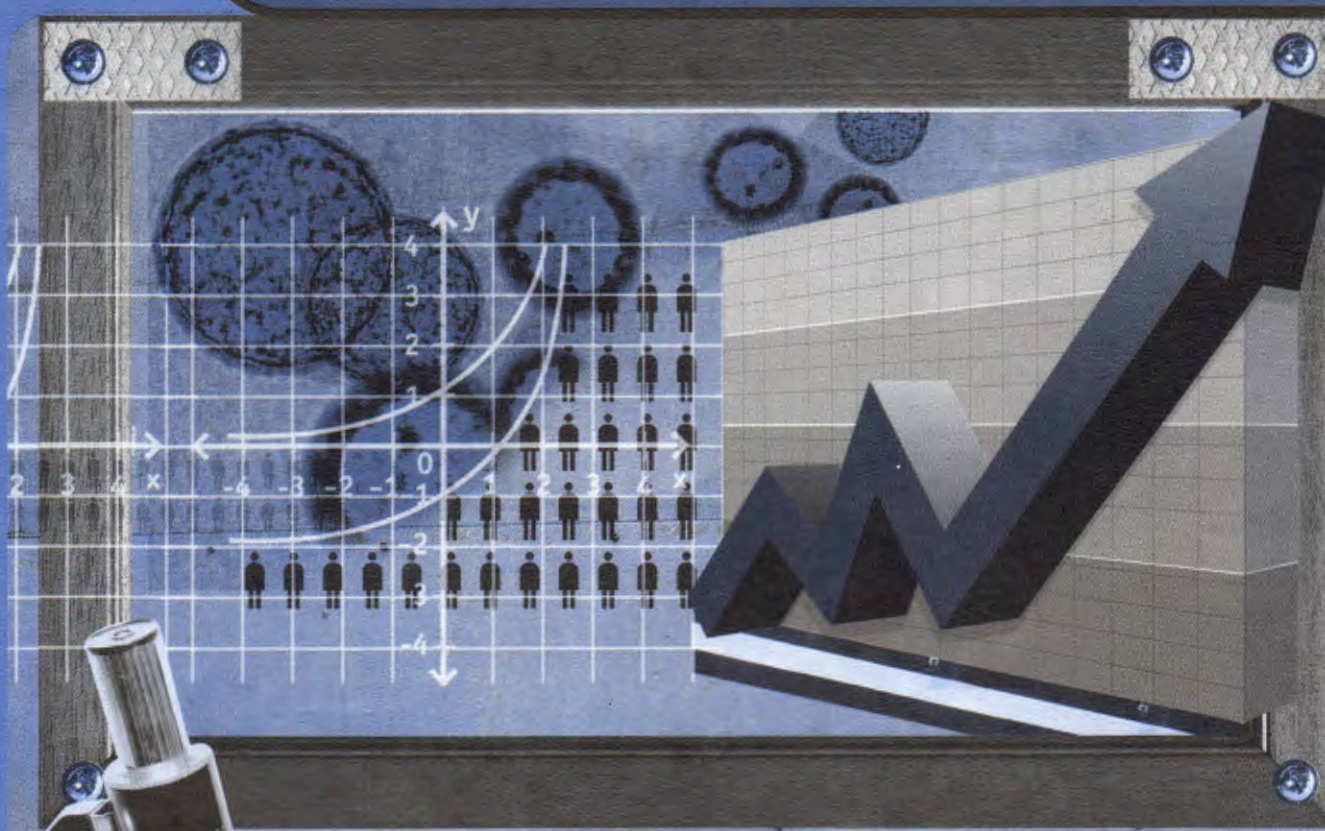
Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática VI / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Luis Garaventa ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
176 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0078-7

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Garaventa, Luis III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



En fenómenos tan diversos como el crecimiento demográfico, la desintegración radiactiva y la reproducción de bacterias, se encuentran magnitudes que varían con un ritmo muy acelerado, produciendo aumentos o decrecimientos muy rápidos, acordes con un modelo expresado por una función llamada *exponencial*.

Por el contrario, las funciones *logarítmicas*, que son las inversas de las exponenciales, varían muy lentamente, por lo cual proporcionan escalas numéricas adecuadas para medir y representar fenómenos naturales que involucran cantidades muy grandes o muy pequeñas, como la intensidad de los movimientos sísmicos o la concentración de partículas en una solución química.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Completen.

a) $a^0 =$ ..... (para $a \neq 0$)

b) $a^1 =$ .....

c) $a^m \cdot a^n = a$ ☐

d) $a^m : a^n = a$ ☐

e) $(a^x)^m =$ .....

f) $\sqrt[m]{a^n} = a$ ☐

g) $\frac{1}{a^m} = a$ ☐

h) $a^m \cdot b^m = (\ \ )^m$

2 Reduzcan a la mínima expresión.

a) $m^3 \cdot m^5 =$ .....

b) $(a^4 \cdot a)^2 =$ .....

c) $\frac{m^4}{m^6} =$ .....

d) $\left(\frac{a^2}{a^3}\right)^{-1} =$ .....

e) $\left(\frac{a^5 \cdot a}{a^9}\right)^{-2} =$ .....

3 Completen.

a) $25 \cdot a^4 \cdot b^2 = (\ \ )^2$

b) $\frac{125 \cdot m^6}{a^9} = \left[\ \ \right]^3$

c) $a^2 \cdot (x-2)^2 = (\ \ )^2$

4 Factoricen cada número y expresen cada cálculo como una potencia.

a) $64 \cdot 8 =$ .....

b) $3 \cdot 27 \cdot 16 =$ .....

c) $\frac{32 \cdot 2 \cdot 625}{16 \cdot 25} =$ .....

d) $\frac{16 \cdot 6 \cdot 9}{64 \cdot 216} =$ .....

5 Señalen la respuesta correcta en cada una de las siguientes situaciones.

a) Un iceberg pierde la cuarta parte de su volumen por año. ¿Cuál es la fracción del iceberg que queda luego de dos años?

I. $\frac{2}{4}$ II. $\frac{1}{16}$ III. $\frac{9}{16}$ IV. $\frac{3}{4}$

b) Un vendedor quiere aumentar el precio de todos sus artículos en un 15%. ¿Cuál es el valor constante por el que debería multiplicar cada precio?

I. 0,15 II. 15 III. 1,015 IV. 1,15

c) La velocidad de la luz es de 300 000 km/seg y un año luz es la distancia recorrida por la luz en 365 días. ¿A cuánto equivale un año luz?

I. $9{,}4608^{12}$ km III. $9{,}4608 \cdot 10^{10}$ km

II. $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km IV. $94{,}608 \cdot 10^{12}$ km

6 Unan con una flecha cada expresión coloquial con la expresión algebraica que le corresponda.

- El opuesto del cuadrado de un número x. — $2(-x)^2$
- El cuadrado del opuesto de un número x. — $-x^2$
- El doble del cuadrado de un número x. — $(-x)^2$
- El doble del cuadrado del opuesto de un número x. — $2x^2$

7 Utilicen una calculadora científica para averiguar entre qué números enteros se encuentra el resultado de cada una de las siguientes potencias (busquen en la calculadora la función x^y).

a) ..... $< 1{,}02^{20} <$ .....

b) ..... $< 1{,}2^{20} <$ .....

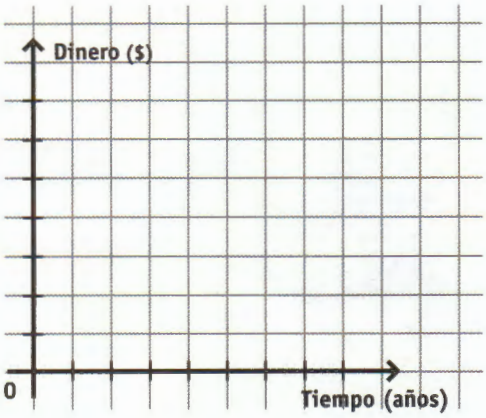
c) ..... $< 2{,}02^{20} <$ .....

d) ..... $< 0{,}2^{20} <$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El modelo exponencial

8 En la actualidad, la mayoría de las entidades financieras trabajan dando un *interés compuesto* sobre los depósitos. Sintéticamente, esto significa que los intereses se acoplan al capital y también generan intereses.
El caso que vamos a considerar es un banco que otorga intereses en forma tal que el capital depositado se duplica al cabo de cada año transcurrido.
Supongan que una persona deposita $1 en este banco y que no hace ningún retiro.



a) Completen la siguiente tabla y realicen el gráfico correspondiente.

Tiempo transcurrido (años)	0	1	2	3	4	5	6
Dinero acumulado ($)	1	2					

b) Encuentren una fórmula que permita calcular el dinero acumulado D en función del tiempo transcurrido *t*.....

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo se llega a acumular $256?.....

d) ¿Cuánto dinero se acumula al transcurrir 10 años? .....

9 Existen sustancias químicas que en condiciones normales de presión y temperatura se evaporan. Tenemos 4 litros de una sustancia líquida que evapora en forma continua la mitad de su volumen por hora.

a) Completen la siguiente tabla y realicen el gráfico correspondiente.

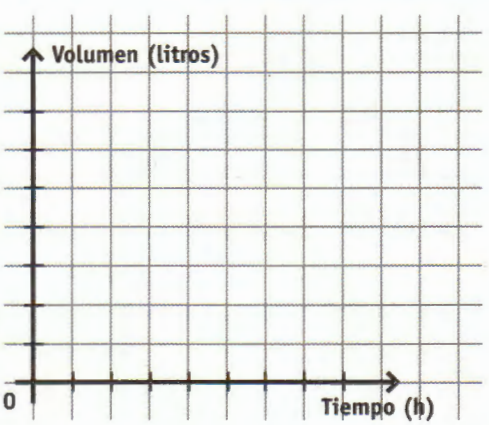
Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Volumen de líquido (litros)	4	2					

b) Encuentren una expresión que relacione el volumen del líquido V con el tiempo transcurrido *t*.

.....

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo quedarían 0,0625 litros de líquido? .....

d) ¿Qué volumen de líquido quedaría luego de un día entero? .....



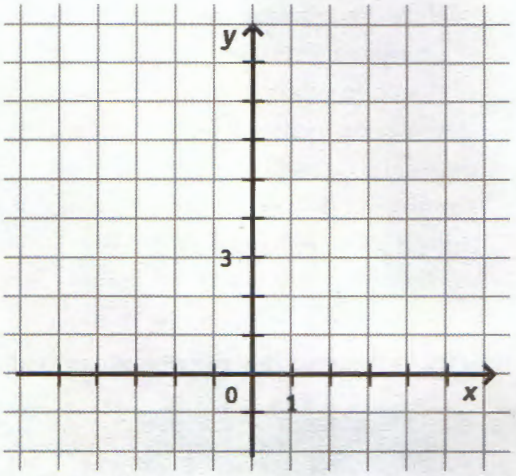
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La función exponencial

10 Consideren la función $f(x) = 2^x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$.

a) Completen la tabla de valores y grafiquen la función.

x	$y = 2^x$
0	
1	
2	
3	
−1	
−2	
−3	



b) Observen el gráfico que hicieron y contesten a las preguntas.

I. ¿Cuál es el conjunto imagen de f ? .....

II. ¿f es creciente o decreciente? .....

III. ¿Tiene algún punto de contacto con el eje de ordenadas? ¿Cuál? .....

IV. ¿Tiene algún punto de contacto con el eje de abscisas? ¿Cuál? .....

V. ¿Qué ocurre con la gráfica de $f(x)$ cuando x toma valores positivos "muy grandes"?

.....

VI. ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ cuando x toma valores negativos cada vez menores?

.....

Para leer y recordar

- Llamamos *función exponencial* a toda función cuya expresión sea de la siguiente forma:

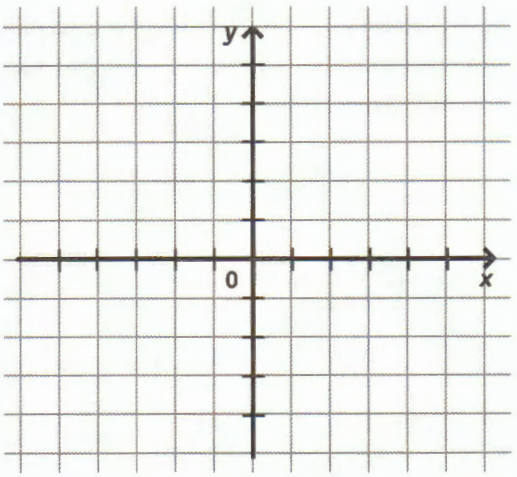
$$f(x) = k \cdot a^x \quad (k \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R};\ k \neq 0;\ a > 0;\ a \neq 1)$$

- El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$. Al representarlas gráficamente, se obtienen curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio, que tienen al eje de abscisas como *asíntota horizontal*.
- Recordemos que una *asíntota* es una recta a la cual la curva se aproxima indefinidamente, sin llegar a "tocarla".

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

11 Representen estas funciones en el mismo sistema cartesiano: $f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $h(x) = 4^x$; $m(x) = -4^x$ y completen las frases.

- Las gráficas de f y g son simétricas con respecto al eje ..... Las gráficas de h y m son simétricas .....
- Las funciones ..... son crecientes y las funciones ..... son decrecientes.



12 Construyan las gráficas de las funciones $f(x) = -3 \cdot 2^x$ y $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
Indiquen para cada una conjunto imagen, puntos de contacto con los ejes y si son crecientes o decrecientes.

13 Indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen sus respuestas en los casos en que sean falsas.

a) La función $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ es creciente.

b) La función $f(x) = -4^x$ tiene una asíntota horizontal que es la recta de ecuación $y = 0$.

c) Todas las funciones del tipo $f(x) = a^x$, con $a > 1$, cortan al eje x.

d) Todas las funciones del tipo $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$, son decrecientes.

14 Encuentren la fórmula de la función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

a) Pasa por el punto (0; 3) y $a = \frac{1}{2}$.

b) $k = 0{,}001$ y pasa por el punto (3; 1).

c) $a = \frac{5}{4}$ y corta al eje de las ordenadas en $y = 6$.

15 Un capital de $10 000 se deposita en un banco que paga un 1% mensual de interés compuesto.

a) Escriban la expresión que relaciona el capital acumulado C con la cantidad de meses transcurridos t.

b) ¿Cuánto dinero se logra acumular luego de un año?

16 En cierto cultivo se reproducen bacterias que se triplican diariamente. Calculen cuántas habrá al cabo de cinco días.

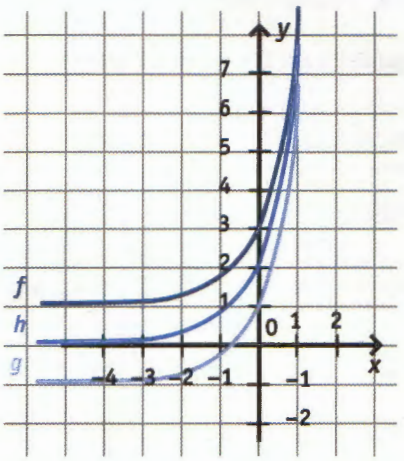
a) Si inicialmente hay una bacteria.

b) Si se comienza con 500 bacterias.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x + b$

17 Observen detenidamente los siguientes gráficos, que corresponden a funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x + b$ y completen el cuadro.



	k	a	b	Conjunto imagen	Asíntota
$f(x) = 2 \cdot 3^x + 1$					
$g(x) = 2 \cdot 3^x - 1$					
$h(x) = 2 \cdot 3^x$					

18 Indiquen cuál es la fórmula que corresponde a cada gráfico.

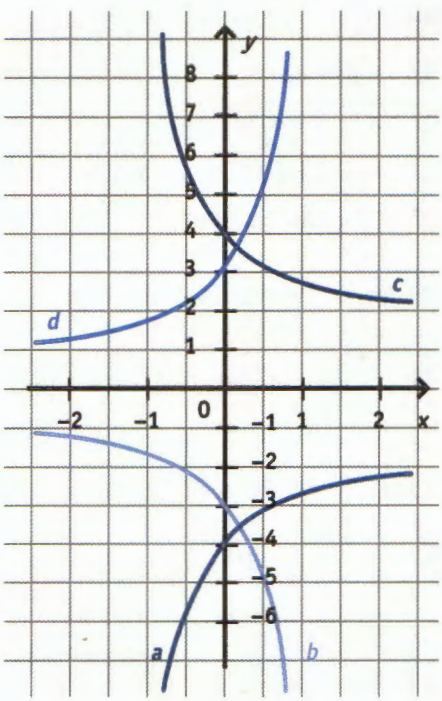
- $f_1(x) = 2 \cdot 5^x + 1$
- $f_2(x) = -2 \cdot 5^x - 1$
- $f_3(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$
- $f_4(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2$

.....

.....

.....

.....



19 Unan con flechas cada función con su respectivo conjunto imagen.

$f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$g(x) = 2 \cdot 3^x$	$d(x) = 10^x + 2$	$h(x) = -0{,}1^x - 1$
$(2; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; -1)$	$(0; +\infty)$

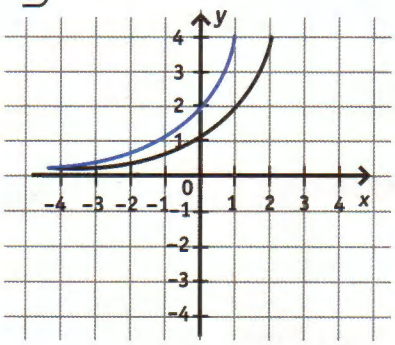
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^{x+c}$

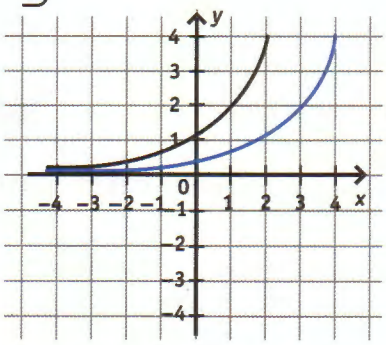
20 Sabiendo que la función graficada en color negro corresponde a $f(x) = 2^x$, indiquen cuál, entre las fórmulas, es la que corresponde a la curva de color en cada caso.

I. $y = 2^x + 2$
II. $y = 2^x - 2$
III. $y = 2^{x+1}$
IV. $y = 2^{x-2}$
V. $y = 2^{x+2} - 1$
VI. $y = 2^{x-2} + 1$

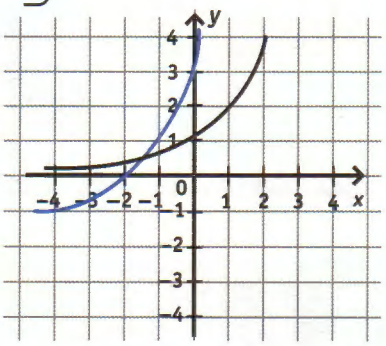
a)



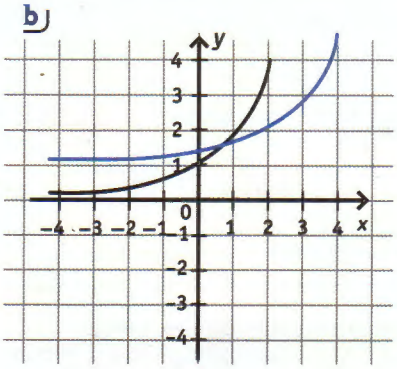
c)



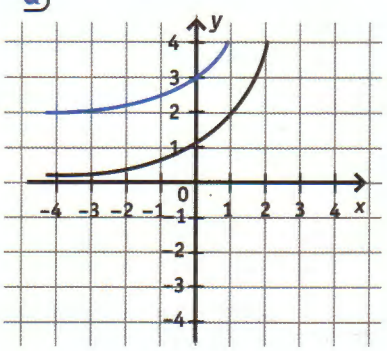
e)



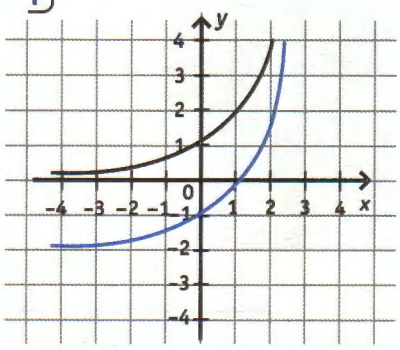
b)



d)

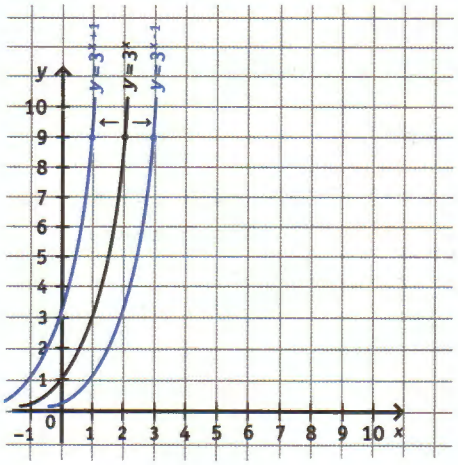


f)



Para observar

A partir de una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$ se puede representar gráficamente otra de la forma $y = k \cdot a^{x+c}$ desplazando la gráfica hacia la derecha o hacia la izquierda, según corresponda.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones exponenciales

21 Unan con flechas los pares de expresiones equivalentes.

2^{2x}	$(2^x)^2$
2^{x+2}	$(2^x)^2 \cdot 4$
2^{x-1}	$2^x \cdot 4$
2^{2x+2}	$2^x \cdot \frac{1}{2}$

22 Transformen cada una de las siguientes expresiones en una sola potencia:

a) $4^x \cdot 2^{x+1} =$ .....

b) $3^{-x} \cdot 9 =$ .....

c) $16^{x-2} \cdot 8^{2x+3} =$ .....

d) $5^{2x+2} \cdot 25^{3-x} \cdot 125^x =$ .....

23 Resuelvan las siguientes ecuaciones y comprueben las soluciones obtenidas.

a) $4^x = \frac{1}{4}$

b) $2^{x+1} = 8$

c) $9 \cdot 3^x = 27$

d) $9^{x+1} = 3$

e) $4^x \cdot 2^{x+1} = 1$

f) $27 \cdot 3^{x+2} - \frac{1}{3} = 0$

g) $2^x + 2^x = 4$

h) $\frac{1}{2} \cdot 3^x + 3^x = \frac{3}{2}$

i) $5^x + 5^{x+1} - \frac{6}{25} = 0$

Para observar

Decimos que una ecuación es *exponencial* cuando contiene a la incógnita en algún exponente. Observen dos ejemplos de cómo se pueden resolver.

$1024 = 8 \cdot 2^x$

$2^{10} = 2^3 \cdot 2^x$

$2^{10} = 2^{3+x}$

$10 = 3 + x$ → Planteamos la igualdad entre los exponentes.

$x = 7$

$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$

$3^x + 3^x \cdot 3^2 = \frac{10}{3}$

$3^x \cdot (1 + 3^2) = \frac{10}{3}$

$3^x \cdot 10 = \frac{10}{3}$

$3^x = \frac{10}{3} : 10$

$3^x = \frac{1}{3}$

$3^x = 3^{-1}$ → Expresamos el segundo miembro como una potencia de 3.

$x = -1$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

24 Completen para que se verifique la igualdad.

a) $4^{\square} = 64$

b) $\square^{3} = -8$

c) $\square^{-2} = \frac{1}{4}$

d) $\square^{3} \cdot 2 = 54$

e) $(-2)^{\square} \cdot (-1) = -16$

f) $\square^{2} : \frac{1}{2} = 128$

25 Transformen cada una de las siguientes expresiones en una sola potencia.

a) $\frac{4^x}{8^{2x+3}} =$ .....

b) $\frac{27^{3x-2}}{81^x} =$ .....

c) $16^{x+5} : 4^{-2x-4} \cdot 32^{x-2} =$ .....

26 Un cohete es disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 km/h. En el primer cuarto de hora, la velocidad se va duplicando por minuto. Calculen cuánto tiempo tardará en alcanzar una velocidad de 512 km/h.

.....

.....

.....

27 Resuelvan las siguientes ecuaciones y verifiquen las soluciones obtenidas.

a) $27^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

b) $2^{x+1} = 4^{2x}$

c) $3^{2x} = 81$

d) $8 \cdot 2^x = 4$

e) $27 \cdot 3^{2x+3} = 9^{3x}$

f) $2^{-1+x} = \frac{1}{16}$

g) $2^x + 2^{x+3} = \frac{9}{4}$

h) $3^{3x-1} - 1 = 0$

i) $2^x + 2^{x+3} + 2^{x-1} = \frac{19}{4}$

28 Resuelvan las siguientes ecuaciones y verifiquen las soluciones obtenidas.

a) $\frac{4^{x+1}}{2^{3x-2}} - 256 = 0$

b) $9^{x+2} : 3^{x+1} \cdot 3^x = 1$

c) $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$

d) $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$

e) $4^{x-1} + 2^{x+2} - 48 = 0$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 24 = 0$

(Ayuda: en el ítem d), pueden plantear una ecuación de segundo grado si reemplazan 5^x por z y 5^{2x} por z^2).

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Logaritmos

Para leer y recordar

- El *exponente* x al que hay que elevar una *base* b para obtener un determinado número a se llama *logaritmo* de ese número en esa base.

$$\text{Es decir que } b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$$

(donde a y b son números reales, $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$)

Por ejemplo: $\log_2 16 = 4$, porque $2^4 = 16$

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$, porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$

$2^x = 32 \Leftrightarrow x = \log_2 32 \Rightarrow x = 5$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$

29 Calculen los siguientes logaritmos cuando sea posible y verifiquen los resultados que obtengan aplicando la definición.

a) $\log_4 64 =$ .....

b) $\log_2 \sqrt{2} =$ .....

c) $\log_3 \frac{1}{9} =$ .....

d) $\log_{\sqrt{3}} 9 =$ .....

e) $\log_6 1 =$ .....

f) $\log_4 0{,}5 =$ .....

g) $\log_{10} 0{,}01 =$ .....

h) $\log_2 (-4) =$ .....

i) $\log_3 0 =$ .....

j) $\log_7 7 =$ .....

30 Analicen los ejemplos y la definición, y respondan a las preguntas.

a) ¿Por qué se establece que el número a debe ser positivo?

b) ¿Por qué se establece que el número b debe ser positivo y distinto de 1?

31 Completen las siguientes expresiones teniendo en cuenta que b es un número real positivo distinto de 1.

a) $\log_b b =$ .....

b) $\log_b 1 =$ .....

c) $\log_b \left(\frac{1}{b}\right) =$ .....

d) $\log_b b^2 =$ .....

e) $\log_b \sqrt{b} =$ .....

f) $\log_{\sqrt{b}} b =$ .....

32 Unan con flechas cada ecuación o inecuación de la fila superior con su correspondiente solución de la fila inferior.

$\log_2 a < 0$	$\log_2 a = 0$	$\log_2 a > 0$	$\log_2 a = 1$
$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 2$	$a = 1$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Logaritmos decimales y logaritmos naturales

Para leer y recordar

- Si la base del logaritmo es 10, se llama *logaritmo decimal* y se puede escribir *log*, sin indicar la base.
- Si la base es el *número e (e = 2,718...)*, se denomina *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano* y se escribe *ln*. La denominación "neperiano" es en honor a John Neper (1550–1617), matemático escocés a quien se atribuye el concepto de logaritmo.
- Tanto los logaritmos naturales como los decimales pueden obtenerse con una calculadora científica.

33 Usen una calculadora científica.

a) Utilicen las teclas [log] y [ln] para obtener los siguientes logaritmos (redondeen a los milésimos).

I. $\log 9{,}8 =$ .....

II. $\log 98 =$ .....

III. $\log 980 =$ .....

IV. $\log 9\,800 =$ .....

V. $\ln 2{,}5 =$ .....

VI. $\ln 25 =$ .....

VII. $\ln 250 =$ .....

VIII. $\ln 2500 =$ .....

b) Analicen los valores que obtuvieron y enuncien alguna conclusión.

.....

34 Calculen mentalmente.

a) $\log 10 =$ .....

b) $\log 0{,}001 =$ .....

c) $\log \sqrt[3]{100} =$ .....

d) $\ln e =$ .....

e) $\ln \sqrt{e} =$ .....

f) $\ln \left(\frac{1}{e}\right) =$ .....

35 La mitad del logaritmo en base 3, del consecutivo de un número entero, más 6, es 7. ¿Cuál es ese número?

36 Apliquen la definición de logaritmo de un número para resolver las siguientes ecuaciones y luego verifiquen las soluciones que obtengan.

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = x$

c) $\log_3 (x + 2) = 2$

d) $2 \cdot \log_4 x = -4$

e) $\log_{12} (2x - 6) + 3 = 3$

f) $-3 \log_3 x^2 - 8 = -14$

37 Resuelvan las siguientes ecuaciones. Tengan en cuenta que la notación $\log_b^2 a$ significa $(\log_b a)^2$.

a) $4 - \log (x^2 - x + 4) = 3$

b) $\log_2^2 x - 2 \cdot \log_2 x - 8 = 0$

c) $\log_3 (x^2 - 4) + 2^{-2} = 4^{-1}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Propiedades de los logaritmos

Para leer y recordar

- Los logaritmos verifican las siguientes propiedades (siempre que a y b sean positivos):
  - Logaritmo de un producto
    $\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
  - Logaritmo de una potencia
    $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$
  - Logaritmo de un cociente
    $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
  - Logaritmo de una raíz
    $\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_c a$
  - Cambio de base
    $\log_c a = \frac{\log_n a}{\log_n c}$
  - $\log_c a = \log_{c^n} a^n$

- La propiedad de cambio de base permite transformar un logaritmo dado en cierta base en otro logaritmo expresado en otra base que resulte más conveniente; por ejemplo, aquellas que aparecen en las calculadoras científicas.

38 Resuelvan aplicando las propiedades de los logaritmos y sin usar la calculadora.

a) $\log_2 (8 \cdot 32) =$ ..... c) $\log_4 64^6 =$ ..... e) $\log_3 \left(\sqrt[3]{81}\right)^5 =$ .....

b) $\log_3 \left(27 \cdot \frac{9}{81}\right) =$ ..... d) $\log \left(\frac{10 : 0{,}01}{0{,}001}\right) =$ .....

39 Apliquen un cambio de base que resulte conveniente para obtener los siguientes logaritmos con una calculadora y anoten los valores redondeados a los milésimos.

a) $\log_2 18 =$ ..... b) $\log_3 100 =$ ..... c) $\log_{0,1} 25 =$ .....

40 Hallen el valor de A teniendo los siguientes datos. $A = \left[\sqrt[5]{\frac{m^3 \cdot a}{u^2}}\right]$; $\log m = 0{,}5$; $\log a = -1{,}5$; $\log u = 2{,}5$.

41 Sabiendo que $\log m = -2$, calculen $\log \left[\frac{(m \cdot \sqrt{m})}{\sqrt[3]{m^2}}\right]$.

42 Encuentren el valor de x.

a) $x = 2^{\log_2 4}$ ..... c) $x = 3^{\log_3 9}$ .....

b) $x = 10^{\log 1000}$ ..... d) $x = a^{\log_a b}$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

43 Sabiendo que el $log\ 2 = 0{,}301$, hallen aproximadamente los siguientes logaritmos sin usar la calculadora.

a) $log\ 25$ = ...

b) $log\ 16$ = ...

c) $log\ 0{,}08$ = ...

d) $log\ 6{,}4$ = ...

44 Si $log_a\ h = m$ y $log_b\ h = r$, escriban en función de m y r las siguientes expresiones:

a) $log_a\ b$ = ...

b) $log_b\ a$ = ...

45 ¿Qué relación debe existir entre m y r para que se verifique $log\ m + log\ r = 0$?

.....

46 Demuestren las siguientes propiedades:

a) $log_m\ (a \cdot b) = log_m\ a + log_m\ b$

b) $log_m \left(\frac{a}{b}\right) = log_m\ a - log_m\ b$

c) $log_m\ a^b = b \cdot log_m\ a$

47 Apliquen logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones (utilicen la calculadora para obtener los logaritmos y aproximen las soluciones redondeando a los milésimos, cuando sea necesario).

a) $2^x = 10$

b) $5\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^{-3} = 0$

c) $e^x + 3e^x = 4$

48 Resuelvan las siguientes ecuaciones y verifiquen las soluciones que obtengan.

a) $log_x\ 27 = 3$

b) $log_{\frac{1}{2}}\ (-x + 5) = 2$

c) $log\ x - log\ 17 = 0$

d) $log_8\ (3 - 2x) = 0$

e) $log_3\ x = 5 \cdot log_3\ 2$

f) $log\ x - log\ 3 = 2$

g) $log_2\ (8 \cdot x) + log_2\ (4 \cdot x^2) = 8$

h) $log_5\ (x + 12) - log_5\ (x + 3) = 1$

i) $log\ (x - 8) + log\ (x - 2) = log\ (-8 - x)$

49 Resuelvan las siguientes ecuaciones y verifiquen las soluciones que obtengan.

a) $log_2\ x - log_8\ x = 1$

b) $(log_5 x)^2 - 2 \cdot log_5\ x = 8$

c) $2 \cdot log\ (-1 + x) = -4^0 + log\ (x + 8)$

d) $log_2\ 3^{x+1} + 1 - log_2\ (3^x + 45) = 0$

50 ¿Cuál es el número cuyo logaritmo en base m es 2 y en base $\frac{m}{2}$ es 3?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Sistemas de ecuaciones

Para leer y recordar

Observen una de las formas en que podemos resolver un sistema de ecuaciones exponenciales.

- En cada ecuación buscamos expresar todas las potencias en la misma base.
- En cada ecuación planteamos la igualdad entre los exponentes.

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 1 \\ 3^{x+y} = 9 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4^{x-y} = 4^0 \\ 3^{x+y} = 3^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- Obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales.
- Resolvemos este sistema.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x = 2 - x \\ 2x = 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

- Verificamos.

$4^{1-1} = 4^0 = 1$ $\quad 3^{1+1} = 3^2 = 9$

51 Resuelvan los siguientes sistemas y verifiquen las soluciones que obtengan.

a) $\begin{cases} 3^{x+y} - \frac{1}{3} = 0 \\ 2^{x-y} - \frac{1}{8} = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{x-y} = 4 \\ 2^x + 2^y = \frac{5}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9^y : 3^x = 27 \\ 2^x - 4^y = -14 \end{cases}$

.....

.....

.....

52 Encuentren los valores de x e y que verifican las siguientes igualdades.

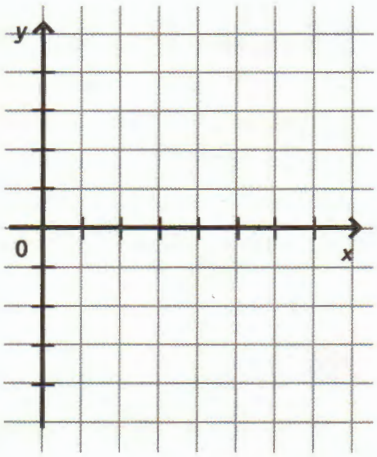
a) $\begin{cases} \log(x + y) = \log x + \log y \\ 2x - 3 = \frac{y}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ 2^x \cdot 4^y = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x - y) + \log(x + y) = \log 44 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log_x 0{,}25 - \log_x \sqrt{2} = -\frac{5}{2} \\ 2^x + 2^y = 36 \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La función logarítmica

53 Consideren las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, que asignan a cada número real positivo su logaritmo en base 2 y en base $\frac{1}{2}$, respectivamente.



a) Completen la tabla y construyan las gráficas correspondientes.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\log_2 x$					
$\log_{\frac{1}{2}} x$					

b) Completen el cuadro.

	Dominio	Imagen	Ceros
$f(x)$			
$g(x)$			

c) Observen la gráfica y respondan a las siguientes preguntas:

I. ¿Cortan al eje de ordenadas? ¿Por qué?

.....

II. ¿Qué se observa, en ambas gráficas, cuando los valores de x se aproximan a cero?

.....

III. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada función?

.....

IV. ¿Cuál es la relación gráfica que se observa entre ambas curvas?

.....

Para leer y recordar

- Llamamos *función logarítmica* a toda función cuya expresión sea de la siguiente forma:

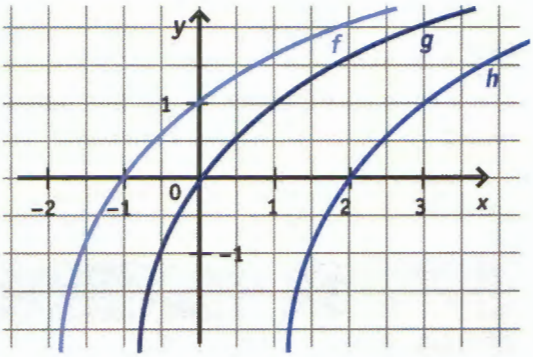
$$f(x) = \log_b x \ (x > 0; b > 0 ; b \neq 1)$$

- El dominio de estas funciones son los reales positivos ($\mathbb{R}^+$), y al representarlas gráficamente se obtienen curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio, que tienen al eje de ordenadas como asíntota vertical.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones del tipo $f(x) = \log_c (ax + b)$

54 Los siguientes gráficos corresponden a funciones logarítmicas de la forma $f(x) = \log_2 (x + b)$.
En cada una, encuentren el valor de b; indiquen el dominio, el conjunto imagen y los puntos de contacto con los ejes, cuando los tenga.



55 En la gráfica está representada la función $f(x) = \log x$.

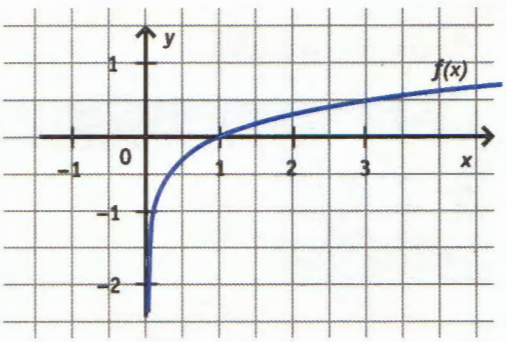
a) Sin hacer cálculos, tracen en el mismo sistema las curvas correspondientes a las funciones $g(x) = \log(-x)$, $h(x) = -\log x$ y $j(x) = -\log(-x)$.

b) Observen las gráficas de las cuatro curvas y respondan a las siguientes preguntas:

I. ¿Tienen el mismo dominio? .....

II. ¿Tienen el mismo conjunto imagen? .....

III. ¿Tienen la misma asíntota vertical? .....



56 Expliquen por qué, para determinar el dominio de una función del tipo $f(x) = \log_c (ax + b)$, es necesario averiguar para qué valores de x se cumple que $ax + b > 0$.

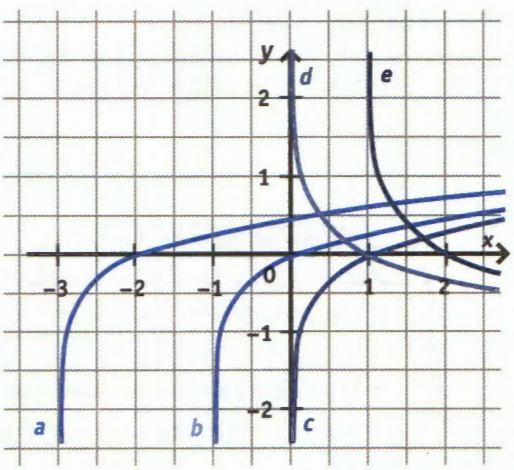
57 Consideren las funciones $f(x) = \log_2 (x + 2)$ y $g(x) = \log_2 (2x - 4)$.

a) Hallen el dominio de cada una.

b) Para cada función, construyan una tabla de valores teniendo en cuenta su dominio y realicen el gráfico.

c) Indiquen la ecuación de la asíntota y los puntos de corte con los ejes para cada función.

58 Indiquen en el gráfico cuál es la curva que corresponde a cada una de las funciones y completen el cuadro.



Curva	Fórmula	Dominio	Conjunto imagen	Asíntota	f(0)	ceros
	$\log x$					
	$-\log x$					
	$\log (x + 3)$					
	$-\log (x - 1)$					
	$\log (x + 1)$					

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El modelo logarítmico

59 Una manera de medir la intensidad de los terremotos es a través de la llamada *escala de Richter.* Esta es una escala logarítmica de base 10, que responde a la siguiente fórmula:

$$M = \log p$$

donde M representa el grado en la escala, y p indica cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda sísmica del terremoto, en comparación con una onda de referencia correspondiente a una situación normal. Por ejemplo, si el grado de un terremoto en la escala de Richter fue mayor que otro en 3 unidades, esto quiere decir que su intensidad fue 10^3 veces mayor.

En el año 1906, un terremoto en la ciudad chilena de Valparaíso tuvo una magnitud de 8,4 en la escala de Richter. En 1960, en la ciudad de Valdivia, hubo otro sismo que fue de una intensidad $10^{1,1}$ veces mayor. Calculen el grado de este terremoto en la escala de Richter.

.....

.....

60 La masa $m(t)$ de una sustancia radiactiva que va quedando al cabo de t días se calcula con la fórmula: $m(t) = M \cdot e^{-0,2 \cdot t}$.

a) Si la masa inicial M es de 38 g, ¿cuánta sustancia quedará, aproximadamente, al cabo de un año?

.....

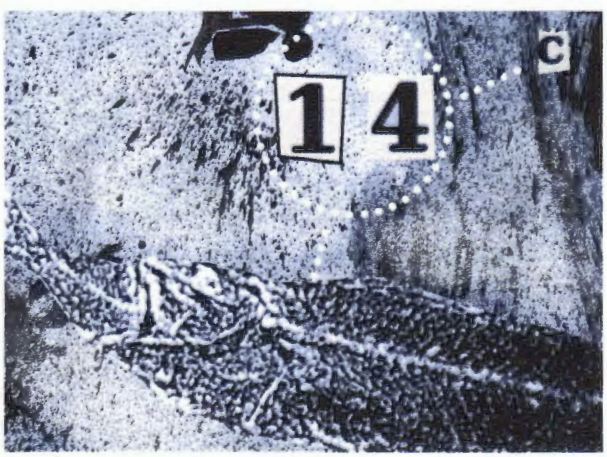
b) ¿Al cabo de cuánto tiempo la masa se habrá reducido a la tercera parte?

.....

c) Representen este caso en un gráfico aproximado.

.....

61 Para la *datación* de restos arqueológicos se utiliza el *C-14 (carbono-14).* Este isótopo radiactivo del carbono se desintegra con una velocidad tal que su masa se reduce a la mitad en aproximadamente 5730 años. Se encuentra un fósil y se calcula que cuando estaba vivo contenía 2,5 mg de *C-14.* Al realizarse las mediciones en los restos, se encuentran 0,083 mg de ese isótopo. ¿Qué edad aproximada tiene el fósil?



.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las sucesiones geométricas

Para leer y recordar

- Una *sucesión numérica* es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales o un subconjunto de este y cuya imagen está incluida en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
- Cuando trabajamos con sucesiones, prestamos especial atención al *número de orden n* que le corresponde a cada una de las imágenes, y a estas las llamamos *términos* de la sucesión.
- Los términos de una sucesión siguen una "regularidad" o "ley" que la caracteriza, que, en muchos casos, se expresa algebraicamente mediante una fórmula a la que llamamos *término general* o *término enésimo* de la sucesión.

Observen en el siguiente ejemplo la notación que utilizamos para trabajar con sucesiones.

Consideremos la sucesión de término general $a_n = 3n + 2$.

Lugar que ocupa	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...	n
Término	$a_1 = 3 \cdot 1 + 2$ $a_1 = 5$	$a_2 = 3 \cdot 2 + 2$ $a_2 = 8$	$a_3 = 3 \cdot 3 + 2$ $a_3 = 11$	...	$a_n = 3 \cdot n + 2$

- Una *sucesión geométrica* es una sucesión numérica en la cual cada término se obtiene multiplicando por un valor constante (si $r > 0$ y $r \neq 1$), llamado *razón*, al término anterior.

$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r$ $\quad a_1 \neq 0$

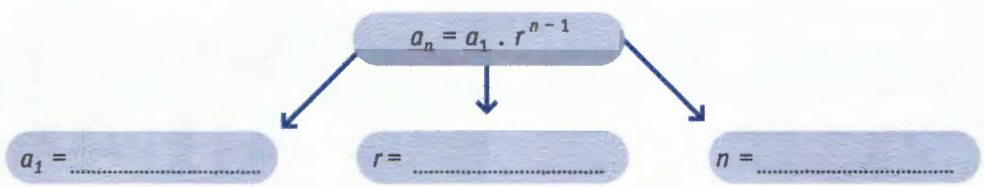
$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3$

$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}} \rightarrow$ *Fórmula del término general de una sucesión geométrica.*

- Toda sucesión geométrica puede asociarse a una función exponencial cuyo dominio está incluido en $\mathbb{N}$ y cuya imagen está incluida en $\mathbb{R}$.

62 Despejen cada una de las variables en la fórmula del término general y completen.



63 Sobre la base de la información dada, analicen si cada una de las siguientes sucesiones es o no una sucesión geométrica. Para las que lo sean, calculen su razón y escriban la fórmula del término general.

a) 3; 6; 12; 24; 48...

b) −1; 2; −4; 8; −16...

c) 2; $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{27}{32}$; $\frac{81}{128}$ ...

d) 3; 6; 24; 192; 3072...

64 El primer término de una sucesión geométrica es 4 y su razón es 2. Hallen los cinco primeros términos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica

65 Analicen si existe una única sucesión geométrica tal que la suma del primer término y el tercero sea 20, y la suma del tercero y el quinto sea 180.
Luego hallen los cinco primeros términos de la sucesión o las sucesiones que cumplan con estas condiciones.

Para observar

Consideremos una sucesión geométrica de razón 3, cuyos 5 primeros términos son estos:

$$2;\ 6;\ 18;\ 54;\ 162$$

Podemos calcular la suma de estos 5 términos, haciendo lo siguiente:

$$S_5 = 2 \cdot \left(\frac{1 - 3^5}{1 - 3}\right) \Rightarrow S_5 = 242$$

Para sumar los primeros *n* términos de cualquier sucesión geométrica, podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

donde *r* es la razón.

66 Los datos de cada fila de la siguiente tabla corresponden a la misma sucesión geométrica. Completen los que faltan.

a_1	a_2	a_3	a_4	r	S_4
4	20				
15			$\frac{5}{9}$		
		4		0,1	
				0,2	2,496
−8					−15

67 En un prisma rectangular de 216 cm^3 de volumen, tres aristas distintas forman una sucesión geométrica y su suma es 21. Encuentren las dimensiones del prisma.

68 En un cuadrilátero ABCD, $\hat{D} = 9\hat{B}$ y todos los ángulos interiores forman una sucesión geométrica. ¿Cuánto mide cada uno de ellos? ¿Qué clase de cuadrilátero es?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Modelos de crecimiento geométrico

69 En las transacciones financieras, se llama *interés compuesto* al interés que se calcula teniendo en cuenta tanto el capital inicial como el interés acumulado en períodos anteriores al considerado. Un capital inicial $C_0 = \$100$ se deposita en un banco que otorga un 5% de interés compuesto mensual.

Completen la siguiente tabla, que relaciona el *tiempo* del depósito con el *monto* obtenido. Recuerden que llamamos *monto* a la suma del capital inicial y el interés.

Tiempo (meses)	Cálculo del monto	Monto ($)
1	$100 + 100 \cdot 0{,}05 = 100 \cdot (1 + 0{,}05)$	105
2	$100 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}05) = 100 \cdot (1 + 0{,}05)^2$	110,25
3	$100 \cdot (1 + 0{,}05)^2 \cdot (1 + 0{,}05) = 100 \cdot (1 + 0{,}05)^3$	
4		
5		
n		

70 Tomen como referencia la tabla de la actividad anterior y completen las siguientes frases:

a) Si se depositan \$100 durante 5 meses al 5% de interés compuesto mensual, el monto acumulado es $M_5 =$ .....

b) Si se depositan \$100 durante 12 meses al 5% de interés compuesto mensual, el monto acumulado es $M_{12} =$ .....

c) Si se depositan \$100 durante n meses al 5% de interés compuesto mensual, la fórmula que sirve para calcular el monto acumulado es .....

d) Si se depositan \$100 durante 12 meses al 3% mensual, el monto acumulado es .....

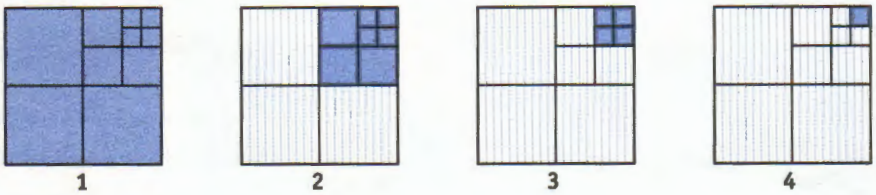
e) Si se depositan \$100 durante n meses con un interés compuesto mensual i, la fórmula que permite calcular el monto acumulado es .....

f) Si se deposita un capital inicial C_0 durante n meses con un interés mensual i, la fórmula que permite calcular el monto acumulado es .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Noción de límite de una sucesión

71 Observen las siguientes figuras:



a) Considerando que el área del cuadrado mayor es 1, completen el siguiente cuadro:

Cuadrado	1	2	3	4
Área de la figura azul	$A_1 = 1$	$A_2 = \frac{1}{4}$	$A_3 =$	$A_4 =$

b) Las áreas de los cuadrados lisos generados según este procedimiento, forman una sucesión geométrica. Indiquen su razón y su término general.

c) Seguramente pueden imaginarse que, si seguimos generando cuadraditos cada vez más chiquitos con la misma regularidad, el área del cuadrado liso "tiende" a acercarse a un valor. ¿Cuál es ese valor?

72 Consideren las mismas figuras de la actividad anterior, pero piensen ahora en la sucesión que forman las áreas de las figuras rayadas.

a) Completen el siguiente cuadro:

Cuadrado	1	2	3	4
Área de la figura rayada	$B_1 =$	$B_2 =$	$B_3 =$	$B_4 =$

b) ¿Se trata de una sucesión geométrica? ¿Por qué?

c) ¿A qué valor tienden a acercarse las áreas a medida que se toman valores de n cada vez mayores?

Para leer y recordar

Cuando en una sucesión ocurre que, a partir de un cierto valor de *n*, los términos se van acercando a un número determinado *L*, decimos que la sucesión *tiene límite* y que su límite es *L*.

Por el momento, no calcularemos, definiremos, ni demostraremos formalmente las propiedades de los límites de sucesiones. Sólo trabajaremos con algunos aspectos relacionados con este concepto, que se pueden abordar a partir de las regularidades numéricas que observamos y de la posibilidad que tenemos de conseguir muy fácilmente listados de valores con la ayuda de una calculadora científica.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El número *e*

73 Consideren la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

a) Encuentren con ayuda de una calculadora científica los términos que se piden en la siguiente tabla. (Anoten todas las cifras que aparecen en el visor).

a_1	$(1 + 1)^1 =$	a_{10}	
a_2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 =$	$a_{1\,000}$	
a_3	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 =$	$a_{100\,000}$	
a_4		$a_{1\,000\,000}$	
a_5		$a_{10\,000\,000}$	

b) Observen los valores que obtuvieron y respondan a las preguntas.

I. ¿La sucesión es creciente? .....

II. ¿Les parece que esta sucesión tiene límite? ¿Por qué? .....

.....

c) Obtengan un valor aproximado del número irracional *e* utilizando la función e^x de una calculadora científica, y anótenlo con todos los decimales posibles. (En muchas calculadoras se consigue pulsando [1] [shift] [ln] [=]).

$e \cong$ .....

d) Comparen los términos de a_n hallados con el número *e* y enuncien alguna conclusión.

.....

Para leer y recordar

El número *e* es un número irracional muy importante en Matemática. Se lo utiliza muy frecuentemente como base de funciones exponenciales y logarítmicas, y aparece en muchas fórmulas matemáticas relacionadas con la Física, la Química y la Economía.

Si continuáramos calculando términos de la sucesión de término general $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para valores de *n* cada vez mayores, nos iríamos acercando al valor exacto de *e*, es decir que *el número e es el límite de esta sucesión.*

74 Confeccionen tablas de valores con la ayuda de una calculadora científica y hallen cuál es el límite de cada sucesión.

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ **d)** $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ **e)** $\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las funciones exponenciales y los cálculos financieros

En el sistema financiero se utilizan con mucha frecuencia cálculos exponenciales y logarítmicos.

Las entidades bancarias o financieras prestan y reciben dinero de usuarios o empresas. Los intereses asociados a esas transacciones se pueden calcular, según el criterio que se establece en las condiciones de cada operación, de diferentes maneras: en forma *simple, compuesta* o *continua.*

En el caso del *interés compuesto,* los intereses se van incorporando al capital al cabo de cada *período de capitalización* y, a su vez, generan intereses.

La fórmula que se utiliza comúnmente para estos cálculos es la siguiente:

$$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

donde C_f es el capital final o acumulado, C_0 es el capital inicial, r es la tasa de interés y t es el tiempo, expresado en las mismas unidades que se utilizan para indicar la tasa.

75 Se deposita un capital de $25 000 en un banco que ofrece una tasa mensual de 0,5% de interés compuesto.

Completen las siguientes oraciones:

a) La expresión que relaciona el capital acumulado con el tiempo (en meses) es .....

b) El capital acumulado luego de un año es .....

c) Para llegar a acumular $26 278,50, el depósito debe permanecer ..... meses.

d) Si el depósito inicial se hubiera realizado en otro banco que ofrece un 0,6% mensual de interés, al cabo de un año se habrían acumulado $ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las funciones logarítmicas y las soluciones químicas

El grado de acidez de una solución química se expresa mediante una magnitud llamada *pH* (significa *potencial hidrógeno*; se lee *pe hache*), que indica la concentración de iones hidrógeno (H^+) en la solución.
El pH se define mediante la siguiente fórmula:

$$pH = -\log [H^+]$$

donde $[H^+]$ representa la concentración de iones hidrógeno por litro de sustancia, indicada en moles por litro.

El agua pura, por ejemplo, es una solución *neutra* y tiene un pH = 7. Cuando el pH de una sustancia es menor que 7, decimos que es *ácida;* si es mayor que 7, decimos que es *básica.*

76 Se analizan dos muestras de agua extraídas de los desagües A y B de una fábrica. La concentración de $[H^+]$ de la muestra A es de 10^{-4} moles por litro, y el pH de la muestra B es de 4,699. ¿Cuál de las dos tiene el mayor grado de acidez?

.....

.....

77 En la etiqueta de los envases de muchos productos, especialmente en artículos de perfumería y limpieza, se informa el pH de la solución.
Busquen en sus casas y en los supermercados, y confeccionen una lista de diez productos con su respectivo pH, en orden creciente según su grado de acidez.

MÁS ACTIVIDADES

78 De una determinada semilla nace una planta. De esta planta se obtienen 5 semillas nuevas. De ellas nacen sendas plantas que, a su vez, dan 5 semillas cada una, y así sucesivamente. Llamaremos "generación cero" a la primera semilla.

a) ¿Cuántas semillas corresponden a la generación 6?

b) Llamen m al "número de generación" y escriban una fórmula que permita calcular la cantidad de semillas en función de m.

c) Busquen ahora una fórmula que permita expresar la cantidad de semillas correspondiente a la generación m, pero suponiendo que la generación cero está compuesta por 8 semillas.

79 Se tiene una muestra de 128 gramos de una sustancia radiactiva (torio-234), cuya masa se reduce a la mitad en aproximadamente 24 días.

a) Calculen la masa aproximada que quedará al cabo de 100 días y al cabo de 200 días.

b) Calculen el tiempo aproximado que habrá transcurrido cuando queden 2 gramos.

80 En un zoológico, un veterinario que debe medicar a una cebra enferma prescribe las siguientes instrucciones:

- El medicamento debe ser suministrado durante 10 días.
- El primer día, la dosis debe ser de 200 ml.
- Cada día subsiguiente se le debe suministrar $\frac{3}{5}$ de la dosis correspondiente al día anterior.

a) ¿Cuál es la dosis indicada para el octavo día?

b) ¿Cuántos ml se le habrán dado luego de 5 días?

c) Escriban la fórmula de la función que relaciona el número de día y la cantidad de medicamento inyectado por día, y grafíquenla en forma aproximada.

81 Grafiquen las siguientes funciones e indiquen, cuando sea posible, el dominio, el conjunto imagen, la ordenada al origen, los ceros, y la asíntota de cada una.

a) $f(x) = -\log_2 (-3 \cdot x + 9)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

c) $f(x) = -4^x + \frac{1}{4}$

82 Grafiquen cada uno de los siguientes pares de funciones en un mismo sistema. Indiquen la ecuación de la recta con respecto a la cual son simétricas.

a) $f(x) = 2^x - 2$ y $g(x) = -2^x + 2$

b) $f(x) = 3^x - 3$ y $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

c) $f(x) = \log_3 (x + 3)$ y $g(x) = \log_3 (-x + 3)$

83 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $(4^x - 256)(3^{x-1} - 27) = 0$

b) $(6^{x+2} - 6)(2^{2x} + 16) = 0$

c) $\log_5 (x + 4) - 2 \cdot \log_5 (x - 2) + 1 = 4^0$

d) $4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = (4^{-1})^x$

e) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_4 (3 \cdot x) = 2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{2}$

84 Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 0{,}5^x - 2^y = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 4^{2x+1} + 2 = 4^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln y = 2 \cdot \ln 2 - \ln x \\ \frac{1}{e^x} = e^x : e^y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 \cdot \log_3 (x + 1) - \log_3 y = 0 \\ \log_{x+1} (y - 3) - 1 = \log_{x+1} x \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

85 Indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen aquellas que sean falsas.

a) La función $f(x) = log_2(x + 1)$ es decreciente.

b) La función $f(x) = -log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ es creciente.

c) La función $f(x) = log_2(x - 4)$ corta al eje x en el punto (5; 0).

d) La función $f(x) = 2 \cdot log_2(x + 2)$ corta al eje de ordenadas en el punto (0; 2).

e) La función $f(x) = log_2(-x - 2)$ no corta al eje de abscisas.

86 Se estudia el comportamiento de la concentración de una solución química sometida a distintas temperaturas y se comprueba que ese comportamiento responde a un modelo exponencial.
Para una temperatura de 2 °C, la concentración es de 9 unidades, y para una temperatura de 4 °C, la concentración asciende a 20,25 unidades.

a) ¿Cuál es la función que relaciona la temperatura y la concentración?

b) ¿Cuál es la concentración a 6 °C?

c) ¿Es cierto que la concentración aumenta en forma directamente proporcional a la temperatura? ¿Por qué?

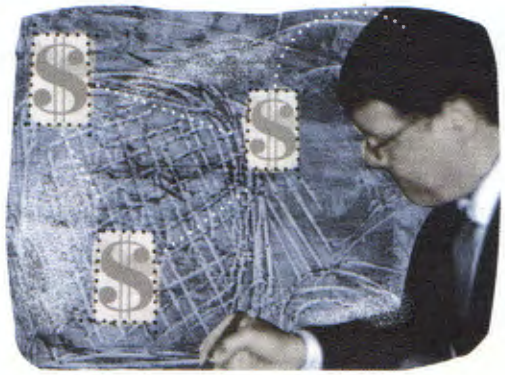
d) ¿A qué temperatura la concentración será de 1,125 unidades?

e) Realicen un gráfico aproximado de esta situación, para temperaturas entre –3 °C y 4 °C.

87 Al estudiar la tasa de crecimiento de cierta población a partir del año 2000, se observa que responde a un modelo exponencial de la forma: $P(x) = 10\,000 \cdot 1{,}02^x$, donde x representa al tiempo en años y $P(x)$, el número de personas.

a) ¿Cuántos individuos había en 2000? ¿Y en 2004?

b) ¿En qué año, aproximadamente, la población alcanza los 11 950 habitantes?



88 Julio trabaja en una empresa. Su contrato estipula un sueldo inicial de $900 al mes y un aumento pautado en un 0,3% mensual.

a) Escriban la función que relaciona la antigüedad de Julio en este trabajo (en meses) y su sueldo (en $).

b) ¿Cuánto ganará al cabo de dos años y medio?

c) ¿A partir de qué mes su sueldo superará los $1000?

89 Un grupo de entomólogos estudia el comportamiento de una plaga cuya población crece según la expresión $p(x) = 1 + 3 \cdot e^x$, donde $p(x)$ representa el número de miles de insectos y x, el tiempo transcurrido, en meses, a partir del comienzo de la investigación.

a) Realicen una gráfica de la función $p(x)$.

b) ¿En cuánto tiempo, aproximadamente, se duplicará la población inicial?

c) ¿En cuánto tiempo, aproximadamente, se cuadruplicará la población inicial?

90 Un cierto cultivo de bacterias crece, con suficiente alimento, según la función $N = 1\,500.6^{\frac{t}{50}}$, donde N es el número de bacterias y t el tiempo transcurrido en horas.

a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 4 horas?

b) ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, habrá transcurrido cuando la población sea de 30 000 bacterias?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

91 Los siguientes datos corresponden a montos a interés compuesto con capitalización mensual. Completen la tabla.

Capital inicial	Interés	Tiempo	Monto
6000	2% mensual	8 meses	
	1,5% mensual	1 año	120000
720		6 bimestres	1368
51535,50	2% mensual		68000

92 Según datos publicados por Usted S. A. en agosto de 2006, en la Argentina había 687 438 hogares más con banda ancha que en 2005. En el mismo año, en Latinoamérica la cifra llegó a 8 500 000.

Una empresa que realiza estudios de mercado estimó que el crecimiento anual de usuarios de banda ancha en la Argentina y en Latinoamérica en los próximos años será "geométrico".

a) Calculen la cantidad de usuarios que se espera que haya en la Argentina en el año 2009, suponiendo una tasa de crecimiento anual del 36,7%.

b) Hallen la tasa de crecimiento anual estimada para Latinoamérica, si se calcula, según esta proyección, una cantidad de 24 300 000 usuarios de banda ancha para 2010.

93 Se estima que el crecimiento demográfico en la República Argentina responde a una ley geométrica de razón $r = 1 + q$, donde q es la tasa media anual de crecimiento de población e indica el número medio de personas que se incorporan anualmente a la población total, por cada 1000 habitantes.

Según datos del Instituto Nacional de Estadística y Censos, los censos de 1980 y 1991 indicaron que la población de la República Argentina fue de 27 949 480 y 32 615 528 habitantes, respectivamente.

a) Considerando estos valores, hallen la fórmula del término general de una sucesión geométrica que se corresponda con el crecimiento demográfico en este período.

b) Calculen el promedio de personas que se incorporaron anualmente a la población total, por cada 1000 habitantes.

c) Calculen cuál fue la cantidad de habitantes en la República Argentina en el año 1995 según este modelo.

d) Estimen cuál será la población de la República Argentina en el año 2010, si se mantiene el ritmo del crecimiento demográfico.

94 En los siguientes sistemas de ecuaciones, a, b, y c son tres números enteros y términos consecutivos de una sucesión geométrica.

$$\begin{cases} x + y = a \\ 4x + 2y = b \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 19x - y = c \\ 8x + y = 9 \end{cases}$$

Sabiendo que ambos sistemas tienen la misma solución, calculen a, b, y c.

95 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y justifiquen sus respuestas mediante un ejemplo.

a) Toda sucesión geométrica puede asociarse a una función exponencial, cuyo dominio es $\mathbb{N}$.

b) Toda función exponencial puede asociarse a una sucesión geométrica.

96 Los datos que se muestran corresponden a sucesiones geométricas. Completen las frases.

a) Si $a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{2}$, entonces, $a_5 =$ .....

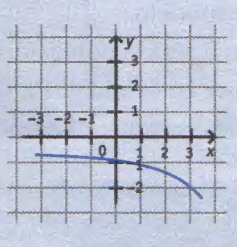
b) Si $a_7 = -64$ y $a_3 = -4$, entonces, $r =$ .....

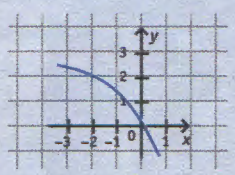
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

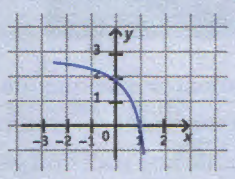
AUTOEVALUACIÓN

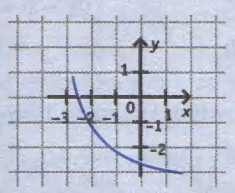
Marquen la opción correcta.

1 El gráfico de la función exponencial que pasa por los puntos $(2; -6)$ y $\left(-1; \frac{8}{3}\right)$ es

a) 

b) 

c) 

d) 

2 Consideren la función $y = -\log_2\left(2x + \frac{1}{2}\right)$.

a) Tiene como dominio al intervalo

I. $(-\infty; +\infty)$ III. $(0; +\infty)$

II. $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ IV. $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

b) Corta al eje x en el punto

I. $(0; 0)$ III. $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$

II. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ IV. $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$

c) Corta al eje y en el punto

I. $(0; 1)$ III. $(0; 0)$

II. $(0; -1)$ IV. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

3 La solución de la ecuación $\log_3\left(2^x + \frac{3}{4}\right) - \log_3\left(2^{x+1} + \frac{5}{2}\right) = -1$ es

a) $x = 0{,}413...$

b) $x = 2$

c) $x = 0{,}07\widehat{3}$

d) $x = -2$

4 ¿Cuál es el par de valores $(x; y)$ que verifican el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 2^y : 2^x - 16 = 0 \\ \log_2 (y - x) = \log_2 (1 + x) + 1 \end{cases}$$

a) $(0; 0)$

b) $(1; 3)$

c) $(-1; 3)$

d) $(1; 5)$

5 Claudio y Adriana depositan en bancos diferentes \$1500 y \$1100, respectivamente. Las tasas anuales de interés respectivas, para los depósitos, son del 5% y del 8%.

a) El capital de Adriana se incrementará según la fórmula

I. $C_f = 1100 \cdot 1{,}8^t$ III. $C_f = 1100 \cdot 1{,}08^t$

II. $C_f = 1100 \cdot 0{,}08^t$ IV. $C_f = 1100 \cdot 0{,}108^t$

b) Ambos capitales acumulados coincidirán cuando hayan transcurrido, aproximadamente,

I. 9 años. III. 11 años.

II. 10 años. IV. 12 años.

c) El capital inicial de Claudio se duplicará cuando hayan transcurrido, aproximadamente,

I. 11 años. III. 13 años.

II. 12 años. IV. 14 años.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

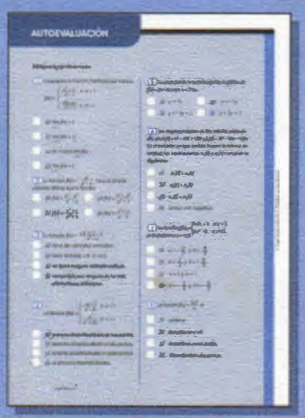
Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

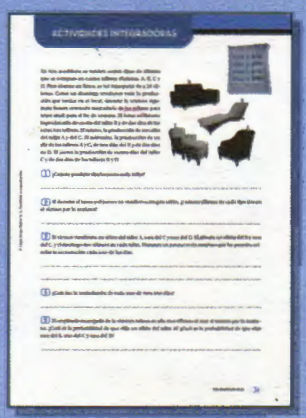
Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

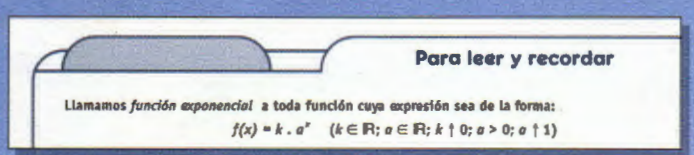
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



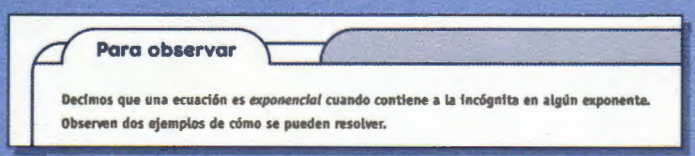
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 4 y 6, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

12 — Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE